Die Berechnung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen durch Fouriertransformation der Gesamtlichtkurve

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt von
HORST MAUDER
aus Nürnberg

1966

Verlag: Dr. Remeis-Sternwarte Bamberg
Druck: Ph. C. W. Schmidt, Neustadt/Aisch, 1966

1966 ₱ 122

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
Tag der mündlichen Prüfung: 16. 2. 1966
Dekan: Universitätsprofessor Dr. E. Wirth
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. P. Wellmann
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. E. Mollwo

Sonderdruck aus:
Kleine Veröffentlichungen der Remeis-Sternwarte Bamberg, Band 3, Nr. 38

KLEINE VERÖFFENTLICHUNGEN
DER REMEIS-STERNWARTE BAMBERG
ASTRONOMISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NR. 38

Die Berechnung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen durch Fouriertransformation der Gesamtlichtkurve*

von
H. MAUDER

Februar 1966

* Die Arbeit wurde im Februar 1966 von der Universität Erlangen-Nürnberg als Dissertation angenommen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535718_0090

Zusammenfassung

Es wird eine neue Methode zur Berechnung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen angegeben. Statt der Lichtkurven werden zur Lösung deren Fouriertransformierte verarbeitet. Dadurch ist es möglich, auf die Rektifikation der Lichtkurve mit allen ihren Problemen zu verzichten. Man ist nicht mehr gezwungen, die beiden Sterne als einander ähnliche dreiachsige Ellipsoide anzunehmen. Außerdem ist es nicht mehr nötig, die Anteile von Reflexionseffekt und Verformung am Orientierungslichtwechsel zu kennen. Verzichtet man auf die Korrekturen der zweiten Näherung, dann kann die Methode auch für beliebige rektifizierte Lichtkurven benutzt werden. In einem unabhängigen Rechengang können bei guten Lichtkurven auch die Randverdunkelungskoeffizienten bestimmt werden. Die Methode wird an dem Beispiel W UMa praktisch erprobt.

I. Einleitung

Es existieren zahlreiche Methoden zur Bestimmung der Elemente eines Bedeckungsveränderlichen aus der beobachteten Lichtkurve. Für hinreichend weit getrennte Sternpaare lassen sich damit sehr gute Lösungen finden, während bei der Behandlung sehr enger Sternpaare (Kontaktsysteme) große Schwierigkeiten auftreten. Der Grund dafür ist leicht einzusehen: alle Lösungsmethoden gehen von dem sphärischen Modell aus, dem Modell kugelförmiger, ungestörter Sterne, die sich auf Kreisbahnen umeinander bewegen. In einem physikalisch realisierten Fall ruft die wechselseitige Verformung durch Gezeitenkräfte und Rotation sowie die gegenseitige Aufhellung der einander zugewandten Hemisphären für den Beobachter auf der Erde einen positionsabhängigen Lichtwechsel hervor, den Orientierungslichtwechsel. H. N. RUSSELL und H. SHAPLEY [10] konnten nachweisen, daß die Lichtkurve eines Bedeckungsveränderlichen mit Orientierungslichtwechsel durch eine besondere Transformation, Rektifikation genannt, in die Lichtkurve eines äquivalenten sphärischen Modells überführt werden kann. Dabei muß angenommen werden, daß die beiden verformten Sterne dreiachsige, einander ähnliche Ellipsoide sind. Diese Annahme ist eine gute Näherung im Falle hinreichend weit getrennter Systeme; je enger das Bedeckungspaar ist, desto schlechter wird das Modell und damit die Lösung. Z. KOPAL [3, 4, 5] entwickelte die bisher genaueste Methode, in der besonders die Verbesserung der Elemente durch differentielle Korrektionen eingeführt wird, um zu realistischeren Lösungen zu gelangen. Er weist aber darauf hin [7], daß im Falle von Kontaktsystemen oft nur eine a priori Voraussetzung über das Verhältnis der Radien der beiden Sterne, aus dem spektroskopisch ermittelten Massenverhältnis gewonnen, eine vertrauenswürdige Lösung ergibt. Die Lichtkurve selbst dient praktisch nur zur Bestimmung der Bahnneigung. Würde man alle Elemente aus der Lichtkurve allein ableiten, so können bei Benutzung der verschiedenen Methoden stark abweichende Ergebnisse auftreten.

Ein großer Nachteil ist bei den herkömmlichen Methoden neben der Beschränkung auf das sphärische Modell auch darin zu sehen, daß der Rechenaufwand die getrennte Behandlung aller einzelnen Meßpunkte nicht zuläßt. Es müssen Normalpunkte benutzt werden, oder sogar nur wenige charakteristische Punkte der Lichtkurve. In der vorliegenden Arbeit wird eine systematische Methode zur Bestimmung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen entwickelt, bei der diese Nachteile nicht auftreten. Eine direkte Rektifikation der Lichtkurve ist nicht erforderlich, die einzelnen Meßpunkte werden ohne vorherige Mittelung verarbeitet. Den Anlaß zu dieser Arbeit gab der Vorschlag von Z. KOPAL [6], die Lichtkurve eines Bedeckungsveränderlichen als Darstellung eines zeitlichen Ablaufes in der Form ihrer Fouriertransformierten zu untersuchen. Dieser Vorschlag wurde von M. KITAMURA [2] bereits teilweise ausgenutzt, aber auch bei seiner neuen Methode bleibt die Beschränkung auf das sphärische Modell mit vorhergehender Rektifikation bestehen, was sich in der Unsicherheit der Lösung bemerkbar machen kann.

Die notwendigen numerischen Rechnungen der vorliegenden Arbeit wurden weitgehend auf der digitalen Rechenmaschine Z 23 des mathematischen Institutes der Universität Erlangen-Nürnberg durchgeführt. Einige der Werte C_0 wurden auch auf der Rechenmaschine LGP 21

der Remeis-Sternwarte Bamberg gerechnet. Diese Maschine wurde der Sternwarte im Juli 1965 von der deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt.

Im Folgenden seien einige häufiger gebrauchte Abkürzungen und Bezeichnungen definiert.

P = Umlaufsperiode
t = Zeitpunkt der Beobachtung
t_0 = Zeitpunkt des letzten Hauptminimums
$\psi = \frac{t - t_0}{P}$ = Phasenwinkel
$l(\psi)$ = Helligkeit zur Zeit t bzw. beim Phasenwinkel ψ
λ_H, λ_N = Helligkeit im Haupt- bzw. Nebenminimum
i = Neigung der Bahnnormalen gegen den Visionsradius
r_a, r_b = Radien der beiden Sterne in Einheiten ihres mittleren Abstandes
L_a, L_b = relative Leuchtkräfte der beiden Sterne, $L_a + L_b = 1$
$\mathfrak{L}_a, \mathfrak{L}_b$ = relative Leuchtkräfte der beiden Sterne in Abhängigkeit vom Phasenwinkel ψ
$k = \frac{r_a}{r_b}$ = Radienverhältnis
q = Massenverhältnis
u_a, u_b = Randverdunkelungskoeffizienten

Bei indizierten Größen bezeichnet stets der Index a den größeren, der Index b den kleineren Stern; H den im tieferen Hauptminimum bedeckten, N den im flacheren Nebenminimum bedeckten Stern. 1 bezieht sich auf den bedeckten, 2 auf den bedeckenden Stern.

II. Die Fouriertransformierte einer Lichtkurve

§ 1. Der Lichtwechsel

Die Helligkeit l eines Bedeckungsveränderlichen ist eine Funktion des Phasenwinkels ψ. Dabei sei im Folgenden stets angenommen, daß der im Nebenminimum bedeckte Stern den ruhenden Hauptstern auf einer Kreisbahn umläuft. Die Lichtkurve ist daher symmetrisch zur Mitte des Hauptminimums ($\psi = 0$). Die Gesamthelligkeit des Systems ist

$$l(\psi) = \mathfrak{L}_a(\psi) + \mathfrak{L}_b(\psi) - \Delta\,\mathfrak{L}_i(\psi) \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{L}_a$, $\mathfrak{L}_b$ die Helligkeiten der beiden Komponenten sind; $\Delta\,\mathfrak{L}_i$ ist der Lichtverlust durch Bedeckung im Haupt- bzw. Nebenminimum. Im sphärischen Modell sind $\mathfrak{L}_a$ und $\mathfrak{L}_b$ Konstante; $\Delta\,\mathfrak{L}_i$ erhält man durch Integration der Flächenhelligkeit über eine von zwei Kreisbogen begrenzte Fläche. Im allgemeinen Fall ist zu berücksichtigen, daß durch Rotations- und Gezeitenkräfte nicht nur die Sterne verformt werden, sondern auch die Flächenhelligkeit entsprechend dem lokalen Gravitationspotential variiert. Dazu kommt die Aufhellung der einander zugewandten Hemisphären durch Reflexionseffekt.

Von besonderem Interesse ist die Gruppe der W UMa-Sterne; hier stehen die beiden Sterne einander so nahe, daß sie sich berühren. Die Verformung wird besonders stark, während der Reflexionseffekt im allgemeinen keine Rolle spielt, da die beiden Komponenten nahezu gleiche Effektivtemperaturen besitzen. Gerade diese Sterne stellen den Bearbeiter vor große Probleme, da ihre Form durch das rektifizierbare Modell nur schlecht wiedergegeben werden kann. In einer Monographie hat Z. KOPAL [5] die theoretischen Lichtänderungen von Bedeckungsveränderlichen untersucht, wobei er von der Darstellung des Doppelsternsystems durch das Roche-Modell ausgeht. Seine Ergebnisse dienten als Grundlage dieser Arbeit. Es sei aber an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die angegebene Monographie eine große Zahl von Druckfehlern und auch mißverständliche Definitionen enthält. Es wurde daher jede Formel nachgerechnet und teilweise geändert, ehe sie benutzt werden konnte. Das schmälert aber nicht den großen Wert des Buches.

Zur Darstellung der Verformung der beiden Sterne ist streng genommen die Clairaut'sche Differentialgleichung der Hydrostatik zu lösen. Für praktische Zwecke genügt es, die Lösung in eine Reihe zu entwickeln, die nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen werden kann. Es wurden Glieder bis zur Ordnung r^5 berücksichtigt, wobei r der Radius des betrachteten Sternes ist in Einheiten seines Abstandes von dem anderen Stern. Diese Näherung dürfte in allen praktisch vorkommenden Fällen genügen. $\mathfrak{L}_a(\psi)$ und $\mathfrak{L}_b(\psi)$ werden damit endliche Reihen, die nach Kugelfunktionen von $l_0 = \sin i \cos\psi$ entwickelt werden können. $\Delta\,\mathfrak{L}(\psi)$ ist darstellbar als Produkt einer konstanten Helligkeit $L_i{}^\circ$ mit einer Reihe, deren führender Term der Bedeckungsfunktion des sphärischen Modells entspricht; die folgenden Terme sind mindestens von der Ordnung r^3 klein gegenüber dem Hauptterm. Setzt man die Randverdunkelung eines ungestörten Sternes wie üblich an

$$J = J_0\,(1 - u - v - \ldots + u\cos\gamma + v\cos^2\gamma + \ldots) \tag{2}$$

wobei J die Flächenhelligkeit ist und γ der Winkel zwischen der Normalenrichtung auf der Sternoberfläche und dem Visionsradius, dann erhält man $\Delta\,\mathfrak{L}_i$ in folgender Form:

$$\Delta\,\mathfrak{L}_i = L_i{}^\circ\,\{(1 - u - v - \ldots)\,(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) + u\,(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) + v\,(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) + \ldots\} \tag{3}$$

Die Funktionen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, durch die der Bedeckungsgrad bestimmt ist, sind bei Z. KOPAL [5] in ihrem Zusammenhang mit den Elementen der Sterne ausführlich diskutiert. Für das sphärische Modell ist $\Delta\,\alpha = 0$. Üblicherweise wird auch $v = 0$ angenommen, da das lineare Randverdunkelungsgesetz eine gute Näherung darstellt und v nur sehr klein ist. Überdies sind theoretische Werte für v nicht hinreichend gut bekannt. Im Folgenden wird daher stets $v = 0$ gesetzt, prinzipiell ist es jedoch ohne weiteres möglich, die angegebene Methode auch für $v \neq 0$ zu benutzen.

Im Normalfall des sphärischen Modells ist

$$\Delta\,\mathfrak{L}_i = L_i{}^\circ\,\{(1 - u_i)\,\alpha_0 + u_i\,\alpha_1\} \tag{4}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß

$$L_i = L_i{}^\circ\,\frac{3 - u}{3} \tag{5}$$

die Helligkeit des randverdunkelten Sternes im sphärischen Modell ist und

$$x = \frac{2u}{3 - u} \tag{5a}$$

der bei RUSSELL und MERRILL [11] benutzte Randverdunkelungskoeffizient. Dann ist

$$\Delta\,\mathfrak{L}_i = L_i\,\{(1 - x_i)\,\alpha_0 + x_i\,\frac{3}{2}\alpha_1\} \tag{6}$$

§ 2. Die Fourierkoeffizienten

Der Ausdruck für die Gesamthelligkeit eines photometrischen Doppelsternes in Abhängigkeit vom Phasenwinkel ψ ist durch Gl. (1) gegeben. $l(\psi)$ besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Anteilen: einer zeitlich kontinuierlich veränderlichen Größe, dem Orientierungslichtwechsel $\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_b$, und einer zeitlich diskontinuierlichen Größe, dem Bedeckungslichtwechsel $\Delta\,\mathfrak{L}_i$. Betrachtet man statt der Lichtkurve selbst ihre Fouriertransformierte, so ist eine einfache Trennung der beiden Anteile möglich. Da die Kurve zur Phase $\psi = 0$ symmetrisch ist, entfallen alle Sinusglieder und es ist

$$l(\psi) = \frac{C_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \cos n\psi \tag{7}$$

Umgekehrt ist dann

$$C_n^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} l(\psi)\cos n\psi\, d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_b)\cos n\psi\, d\psi - \\ - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\,\mathfrak{L}_i \cos n\psi\, d\psi \qquad (8)$$

Zur Trennung der Anteile des Orientierungs- und Bedeckungslichtwechsels setzt man

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\,\mathfrak{L}_i \cos n\psi\, d\psi \qquad (9)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_b)\cos n\psi\, d\psi \qquad (9a)$$

Im Rahmen der Genauigkeit der theoretischen Lichtkurven, wie sie im vorhergehenden Abschnitt angegeben wurde, treten in der Reihenentwicklung für $\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_b$ höchstens Glieder der Ordnung $n = 4$ auf. Durch Ausgleichsrechnung kann man außerhalb der Bedeckungen, also für $\Delta\,\mathfrak{L}_i = 0$, den Anteil des Orientierungslichtwechsels an C_n^* bestimmen. Die Erfahrung zeigt, daß man in vielen Fällen besser schon mit $n = 2$ abbricht, da die Unsicherheit der Beobachtungen eine Bestimmung der sehr kleinen Werte A_3 und A_4 kaum mehr zuläßt. Nur bei sehr guten Beobachtungen kann man auch diese Werte ableiten. Man muß nur darauf achten, daß zur Bestimmung der A_n keine Werte $l(\psi)$ benutzt werden, die schon von der Bedeckung beeinflußt sind. Die Trennung von Bedeckungs- und Orientierungslichtwechsel ist sehr einfach

$$C_n = A_n - C_n^* \qquad n \leqslant 4 \qquad (10)$$

$$C_n = -C_n^* \qquad n > 4 \qquad (10a)$$

Dieser Vorgang ist der üblichen Helligkeitsrektifikation sehr ähnlich, hat aber wesentliche Vorteile. Während man sonst die Anteile von Reflexionseffekt und Elliptizitätseffekt am Orientierungslichtwechsel abschätzen muß, um rektifizieren zu können, genügt hier eine einfache Subtraktion, ohne daß eine detaillierte Kenntnis des Orientierungslichtwechsels notwendig ist. Noch problematischer als die Trennung der einzelnen Effekte ist bei den üblichen Methoden die Phasenrektifikation. Dabei muß ein Formparameter, die photometrische Exzentrizität Nz bzw. z eingeführt werden. Diese Werte sind in der Praxis oft nur sehr unsicher zu bestimmen. Durch die Phasenrektifikation wird ψ geändert nach der Formel

$$\sin^2\psi' = \frac{\sin^2\psi}{1 - z\cos^2\psi} \qquad (11)$$

Das geschieht unter der praktisch unvermeidbaren Annahme, daß die beiden Sterne einander ähnliche Ellipsoide sind. Im Falle der Berechnung über die Fouriertransformierte ist diese Beschränkung nicht notwendig; der Einfluß der Verformung beider Sterne wird später indirekt berücksichtigt. Eine Phasenrektifikation ist in dieser Methode nicht nötig. Lediglich in der ersten Näherung wird die Tiefe des Hauptminimums — $l(\psi = 0)$ — benutzt. Wie man aber aus (11) sieht, ist in diesem Falle $\sin^2\psi' = \sin^2\psi = 0$. Ursprünglich war von Z. KOPAL die Meinung geäußert worden, daß es möglich sein müßte, nur aus den Fourierkoeffizienten C_n die Elemente des Systems zu bestimmen. Wie die genauere Untersuchung dieses Vorschlages zeigte, scheinen aber zwischen den einzelnen Koeffizienten enge funktionale Beziehungen zu bestehen, durch die eine eindeutige Lösung unmöglich wird. Dieser Zusammenhang wird besonders deutlich sichtbar in Abb. 1, in der $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ gegen $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ aufgetragen wurde. Diese Funktionen stimmen bis auf einen Faktor, der in diesem Zusammenhang unwesentlich ist, mit C_1/C_0 und C_2/C_0 überein. Es muß also noch mindestens eine von den C_n unabhängige Beziehung zugezogen werden. Die Tiefe des Hauptminimums bot sich dabei besonders an, da

dieser Wert nicht nur die am sichersten zu bestimmende Größe einer Lichtkurve ist, sondern auch in einem bekannten Zusammenhang mit den Elementen steht, die den Verlauf der Helligkeitsänderungen bestimmen. Wegen des Orientierungslichtwechsels muß allerdings zunächst die rektifizierte Tiefe des Minimums als Näherungswert benutzt werden, im weiteren Verlauf der Rechnung kann dann aber wieder die nicht rektifizierte Tiefe benutzt werden, da die Einflüsse der Verformung direkt bestimmt werden können.

§ 3. Das sphärische Modell ohne Randverdunkelung

Die beiden Sterne seien kugelförmig mit Radien r_a, r_b und verschwindenden Randverdunkelungskoeffizienten, $u_a = u_b = 0$. Die Helligkeiten seien normiert durch die Forderung $L_a + L_b = 1$. Dann ist das System durch die vier Elemente r_a, r_b, L_a und die Bahnneigung i vollständig bestimmt. Gl. (4) wird dadurch zu

$$\Delta \mathfrak{L}_i = 1 - l(\psi) = L_i^{\circ}\, \alpha_0 \tag{12}$$

mit i = H, N im Haupt- bzw. Nebenminimum. Die Funktion α_0 ist bei Z. KOPAL [5] als $\alpha_0^{\,0}$ ausführlich abgeleitet; es ist

$$\pi r_1^2\, \alpha_0 = r_1^2 \arccos\frac{s}{r_1} + r_2^2 \arccos\frac{\delta - s}{r_2} - \delta \sqrt{r_1^2 - s^2} \tag{13}$$

wobei

$$s = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \delta^2}{2\,\delta} \tag{14}$$

und

$$\delta^2 = \sin^2 i \sin^2\psi + \cos^2 i \tag{14a}$$

Wird im Minimum der kleinere Stern vom größeren bedeckt, ist also $r_1 = r_b$, so nennt man die Bedeckung vom Typ „Occultation" (oc); ist umgekehrt $r_1 = r_a$, so nennt man die Bedeckung „Transit" (tr). Wie man leicht nachrechnet ist

$$\alpha_0^{\,tr} = \alpha_0^{\,oc}\, k^2 \tag{15}$$

α_0 ist nur noch abhängig von r_a, r_b, i und ψ, nicht dagegen von L_a und L_b. Führt man eine neue Gruppe von Funktionen $\mathfrak{C}_n$ ein, definiert durch

$$\mathfrak{C}_n = \int_0^{\pi/2} \alpha_0 \cos n\psi \, d\psi \tag{16}$$

im Hauptminimum und durch

$$\mathfrak{C}_n = \int_{\pi}^{3\pi/2} \alpha_0 \cos n\psi \, d\psi \tag{16a}$$

im Nebenminimum, so werden die Fourierkoeffizienten für das sphärische Modell

$$\overline{C}_n^{\,\circ} = 2\, L_b^{\,\circ}\, \mathfrak{C}_n^{\,oc} + 2\, L_a^{\,\circ}\, \mathfrak{C}_n^{\,tr} = 2\,(L_b^{\,\circ} + (-1)^n k^2 L_a^{\,\circ})\, \mathfrak{C}_n^{\,oc} \tag{17}$$

Der Faktor $(-1)^n$ rührt von dem Vorzeichenwechsel von $\cos(2\nu + 1)\psi$ in Haupt- und Nebenminimum her. Die Funktionen $\mathfrak{C}_n$ hängen nur noch von r_a, r_b und i ab. Da L_a durch L_b ausgedrückt werden kann, ist bei geradem n auch das Verhältnis der C_n nicht mehr von L_a, L_b abhängig. Es werden folgende neue Funktionen definiert:

$$G_{2\nu} = \frac{\overline{\mathfrak{C}}_{2\nu}^{\,0}}{\overline{\mathfrak{C}}_0^{\,0}} = \frac{\mathfrak{C}_{2\nu}^{\,0}}{\mathfrak{C}_0} = G_{2\nu}(r_a, r_b, i) \tag{18}$$

$$G_{2\nu+1} = \frac{\overline{C}_{2\nu+1}^{\,0}}{\overline{C}_0^{\,0}} = \frac{\mathfrak{C}_{2\nu+1}}{\mathfrak{C}_0} \quad \frac{L_b - k^2(1-L_b)}{L_b + k^2(1-L_b)} = G_{2\nu+1}(r_a, r_b, i, L_b) \tag{19}$$

Als Ergebnis der numerischen Berechnungen zeigte sich, daß $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ eine Funktion von $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ sein muß. In Abb. 1 ist $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0 = f(\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0)$ aufgetragen. Es wurden die Werte für Sternradien von 0,05 bis 0,60 gerechnet, bei Bahnneigungen von $i = 90°$ bis $i = 50°$. Lediglich für $r = 0{,}6$ traten geringe Abweichungen von der Kurve auf (etwa von der Größe 0,001). Allerdings sind Radien von 0,6 kaum möglich; die mittleren Radien erreichen wegen der Verformung der Sterne auch in Kontaktsystemen selten einen Wert größer als 0,45. Man kann also $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ unabhängig von r_a, r_b, i aus G_2 direkt bestimmen. Dadurch ergibt sich die folgende Beziehung zwischen L_b und k:

$$g = \frac{|G_1|}{\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0} = \frac{|L_b - k^2(1-L_b)|}{L_b + k^2(1-L_b)} \tag{20}$$

Der Betrag von G_1 wurde genommen, weil $k^2(1-L_b)$ größer als L_b werden kann. Ist $L_H = L^{oc}$, dann folgt aus Gl. (20)

$$\frac{1-g}{1+g} = f = \frac{k^2(1-L^{oc})}{L^{oc}} \tag{21}$$

und daraus

$$L^{oc} = \frac{k^2}{f + k^2} \tag{21a}$$

Falls $L_H = L^{tr}$, dann ist

$$\frac{1-g}{1+g} = f = \frac{1-L^{tr}}{k^2 L^{tr}} \tag{22}$$

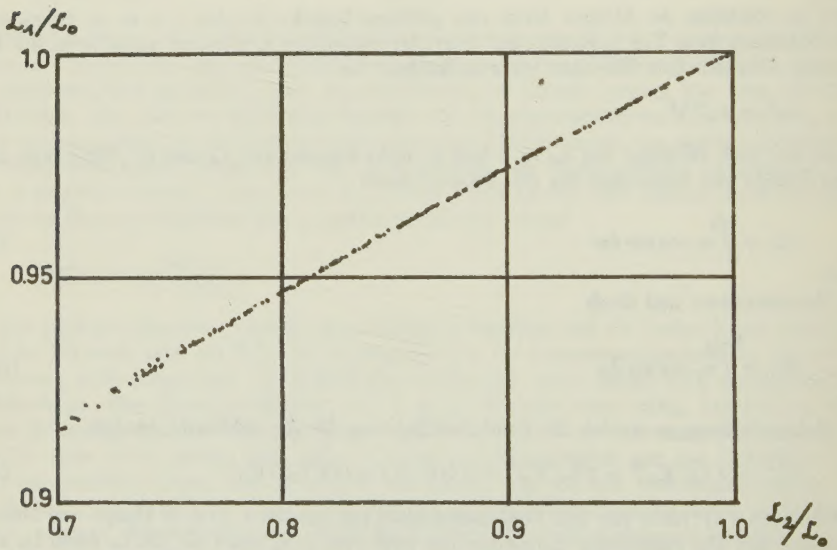


Abb. 1: $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ ist als Funktion von $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ aufgetragen. Werte von r_a und r_b zwischen 0,05 und 0,60 wurden in Schritten 0,05 gerechnet. i wurde von 90° bis 50° in Schritten von 5° variiert. Wie man sieht, ist $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ nur von $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ abhängig, nicht mehr explizit von r_a, r_b, i. Die etwas abweichenden, höher liegenden Werte bei $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ von 0,70 bis 0,75 entsprechen $r_a = 0{,}6$ bei geringer Bahnneigung und kleinem Radienverhältnis.

und es ist

$$L^{tr} = \frac{1}{1 + fk^2} \tag{22a}$$

Theoretisch müßte es möglich sein, die drei Werte r_a, r_b und i aus drei verschiedenen G_n zu bestimmen. Der enge funktionale Zusammenhang zwischen $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ läßt es verständlich erscheinen, daß diese Bestimmung kaum möglich sein würde. Die Untersuchung zeigte, daß bereits geringfügige Beobachtungsfehler die Lösung entscheidend verfälschen würden. Aus diesem Grunde wurde es nötig, zur Berechnung auch noch die Tiefe des Hauptminimums heranzuziehen. Es ist nach Gl. (12)

$$1 - l(\psi = 0) = 1 - \lambda_H = L_H \alpha_0^H \tag{23}$$

wobei α_0^H den Wert von α_0 für $\psi = 0$ bedeutet. Mit den Gl. (21) und (22) wird dann für $L_H = L^{oc}$

$$1 - \lambda_H = L^{oc} \alpha_0^H = \frac{k^2}{f + k^2} \alpha_0^H \text{ (oc)} \tag{24}$$

und für $L_H = L^{tr}$

$$1 - \lambda_H = L^{tr} \alpha_0^H = \frac{1}{1 + fk^2} \alpha_0^H \text{ (tr)} \tag{25}$$

Prinzipiell ist es möglich, beliebige Werte G_n und $\overline{C}_n^0$ zur Berechnung der Elemente zu verwenden, es ist aber sinnvoll, bei möglichst kleinen Werten von n zu bleiben, da diese Koeffizienten die größten Beträge annehmen und die relativen Fehler damit am kleinsten bleiben. Es erwies sich als zweckmäßig, die vier Werte $\overline{C}_0^0$, G_1, G_2 und $1 - \lambda_H$ zur Bestimmung der r_a, r_b, i und L_b zu benutzen.

§ 4. Das allgemeine Modell

Es seien $u_1, u_2 \neq 0$. Dann ist die einfache Formel (12) zu ersetzen durch Formel (4):

$$1 - l(\psi) = \Delta \mathfrak{L}_i = L_i^0 \{(1 - u_i)\, \alpha_0 + u_i \alpha_1\} \tag{26}$$

α_1 ist als α_1^0 bei Z. KOPAL [5] ebenso abgeleitet wie α_0; es kann daher als numerisch bekannte Funktion von r_a, r_b, i und ψ betrachtet werden. Da die Gesamthelligkeiten der Sterne L_i beobachtet werden, ist es zweckmäßiger, nach Gl. (6) zu rechnen. Es ist dann

$$1 - l(\psi) = \Delta \mathfrak{L}_i = L_i \{(1 - x_i)\, \alpha_0 + \tfrac{3}{2} x_i \alpha_1\} \tag{27}$$

Man definiert analog zu den $\mathfrak{C}_n$ die Funktionen $\mathfrak{D}_n$:

$$\mathfrak{D}_n = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \alpha_1 \cos n\psi \, d\psi \tag{28}$$

bzw.

$$\mathfrak{D}_n = \frac{3}{2} \int_{\pi}^{3\pi/2} \alpha_1 \cos n\psi \, d\psi \tag{28a}$$

Die Fourierkoeffizienten werden damit

$$\overline{C}_n = 2 L_b \{\mathfrak{C}_n^{oc} + x_b (\mathfrak{D}_n^{oc} - \mathfrak{C}_n^{oc})\} + 2 L_a \{\mathfrak{C}_n^{tr} + x_a (\mathfrak{D}_n^{tr} - \mathfrak{C}_n^{tr})\} \tag{29}$$

$\mathfrak{D}_n^{oc} - \mathfrak{C}_n^{oc}$ ist für kleines n (0, 1, 2) stets klein gegenüber $\mathfrak{C}_n^{oc}$, $\mathfrak{D}_n^{tr} - \mathfrak{C}_n^{tr}$ ist kleiner als $\mathfrak{C}_n^{tr}$ und erreicht die Größenordnung von $\mathfrak{C}_n^{tr}$ nur, wenn $\mathfrak{C}_n^{tr}$ selbst klein ist gegenüber

$\mathfrak{C}_n^{oc}$. Dieser Vergleich wurde numerisch für alle möglichen Werte von r_a, r_b und i durchgeführt. Es ist also gerechtfertigt, zunächst $u_i = 0$ zu setzen und den Einfluß der Randverdunkelung erst in einer späteren Näherung zu berücksichtigen. Es sei

$$2\, L_b x_b\, (\mathfrak{D}_n^{oc} - \mathfrak{C}_n^{oc}) = D_n^{oc} \tag{30}$$

und

$$2\, L_a x_a\, (\mathfrak{D}_n^{tr} - \mathfrak{C}_n^{tr}) = D_n^{tr} \tag{30a}$$

Dann ist

$$\overline{C}_n^{\,0} = \overline{C}_n - D_n^{oc} - D_n^{tr} \tag{31}$$

Durch die Korrekturen D_n können die Fourierkoeffizienten eines randverdunkelten Sternes auf die eines nicht randverdunkelten zurückgeführt werden. Insbesondere sind die Differenzen D_n nur langsam veränderlich mit r_a, r_b, i, sodaß Näherungswerte dieser drei Größen zur Bestimmung der Differenzen ausreichen.

Durch die Randverdunkelung wird auch $1 - \lambda_H$ beeinflußt. Es ist

$$1 - \lambda_H = L_H \alpha_0^H + \left(\tfrac{3}{2}\, \alpha_1^H - \alpha_0^H\right) \tag{32}$$

oder

$$(1 - \lambda_H)' = (1 - \lambda_H) - L_H\, \delta\alpha^H = L_H\, \alpha_0^H \tag{32a}$$

wobei $\delta\alpha^H = \left(\tfrac{3}{2}\, \alpha_1^H - \alpha_0^H\right)$ ist. Damit sind alle zur Lösung notwendigen charakteristischen Funktionen des randverdunkelten Modells bekannt.

Im allgemeinen Fall können die Sterne nicht mehr als kugelförmig angesehen werden. In Gleichung (27) und (32) muß α durch $(\alpha + \Delta\alpha)$ ersetzt werden. $\Delta\alpha$ ist bei Z. KOPAL [5] angegeben. Setzt man

$$\int \Delta\alpha_0 \cos n\psi\, d\psi = \Delta\mathfrak{C}_n \tag{33}$$

sowie

$$\tfrac{3}{2} \int \Delta\alpha_1 \cos n\psi\, d\psi = \Delta\mathfrak{D}_n \tag{33a}$$

dann werden die endgültigen Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} C_n = {} & 2\, L_b \left\{(1 - x_b)\, (\mathfrak{C}_n^{oc} + \Delta\mathfrak{C}_n^{oc}) + x_b\, (\mathfrak{D}_n^{oc} + \Delta\mathfrak{D}_n^{oc})\right\} + \\ & + 2\, L_a \left\{(1 - x_a)\, (\mathfrak{C}_n^{tr} + \Delta\mathfrak{C}_n^{tr}) + x_a\, (\mathfrak{D}_n^{tr} + \Delta\mathfrak{D}_n^{tr})\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

oder umgerechnet mit den bereits eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} C_n = {} & \overline{C}_n^{\,0} + D_n^{oc} + D_n^{tr} + 2\, L_b \left\{(1 - x_b)\, \Delta\mathfrak{C}_n^{oc} + x_b \Delta\mathfrak{D}_n^{oc}\right\} + \\ & + 2\, L_a \left\{(1 - x_a)\, \Delta\mathfrak{C}_n^{tr} + x_a \Delta\mathfrak{D}_n^{tr}\right\} \end{aligned} \tag{35}$$

Mit der Abkürzung

$$K_n = 2\, L \left\{(1 - x)\, \Delta\mathfrak{C}_n + x \Delta\mathfrak{D}_n\right\} \tag{36}$$

erhält man schließlich

$$\overline{C}_n^{\,0} = C_n - D_n^{oc} - D_n^{tr} - K_n^{oc} - K_n^{tr} \tag{37}$$

Ebenso ist die Tiefe des Hauptminimums

$$(1-\lambda_H)' = (1-\lambda_H) - L_H(\delta\alpha^H + \Delta\alpha^H) = L_H\alpha_0^H \tag{38}$$

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß bei merklichem Reflexionseffekt ein Teil des reflektierten Lichtes durch die Bedeckung verlorengeht. Dieser Lichtverlust äußert sich in einem Zusatzterm zu $\Delta\mathfrak{L}_i$, so daß der tatsächliche Lichtverlust

$$\Delta\mathfrak{L} = \Delta\mathfrak{L}_i + \Delta\mathfrak{L}_i^R \tag{39}$$

ist. Auch der Ausdruck für $\Delta\mathfrak{L}_i^R$ ist bei Z. KOPAL [5] entwickelt. Durch die Integration wird zu $K_n^{oc} + K_n^{tr}$ noch der Term K_n^R hinzugefügt, so daß man bei Systemen mit Reflexionseffekt

$$C_n = \overline{C}_n^0 + D_n^{oc} + D_n^{tr} + K_n^{oc} + K_n^{tr} + K_n^R \tag{40}$$

und

$$(1-\lambda_H) = L_H(\alpha_0^H + \delta\alpha^H + \Delta\alpha^H) + L_N\Delta\alpha^R \tag{40a}$$

erhält. Damit sind die charakteristischen Funktionen für die Beschreibung der Bedeckung eines beliebigen Sternpaares vollständig. Während die $\overline{C}_n^0$ nur von r_a, r_b, i und L_b abhängen, ebenso die K_n^R, sind die D_n zusätzlich noch von den x_i abhängig. Die K_n sind daneben noch Funktionen des Massenverhältnisses q und des inneren Aufbaues der Sterne. Die Abhängigkeit vom inneren Aufbau ist nur schwach; bei einigen numerisch untersuchten Beispielen war die Abhängigkeit von q um eine Größenordnung stärker. Die notwendige numerische Berechnung der C_n, D_n und K_n erfordert einen ziemlichen Rechenaufwand, so daß mindestens eine mittlere Rechenmaschine zur Verfügung stehen muß.

III. Die Methode der Elementeberechnung

§ 1. Die Vorbereitung der Messungen

Die Lichtkurve eines Bedeckungsveränderlichen ist gegeben durch Wertepaare ψ und $l(\psi)$. Daraus müssen zwei Sätze von Fourierkoeffizienten bestimmt werden: die Koeffizienten C_n^* der Gesamtlichtkurve und die Koeffizienten A_n des Orientierungslichtwechsels, die nur aus den Beobachtungen außerhalb der Bedeckungen gewonnen werden. Es kann der Fall eintreten, daß sich bei der Lösung später die Notwendigkeit ergibt, das Intervall zu vergrößern oder zu verkleinern, aus dem die A_n gewonnen wurden. Man möchte einen möglichst großen Bereich von ψ zur Berechnung heranziehen, um die A_n möglichst genau bestimmen zu können; andererseits dürfen sie nicht durch die beginnende Bedeckung verfälscht werden. Die Werte für r und i aus der ersten Näherung reichen aber sicher aus, um das Intervall endgültig festzulegen. Z. KOPAL [5] konnte zeigen, daß auch in Kontaktsystemen die Bedeckungen nicht weiter als bis $\pm 57^\circ$ vor oder nach den Mitten der Minima ausgedehnt sein können, so daß man außerhalb dieser Intervalle mit Sicherheit nur Orientierungslichtwechsel zu erwarten hat. Da bei den A_n meistens nur bis $n = 2$ oder höchstens $n = 4$ gerechnet wird, können sie leicht durch Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Die Berechnung der C_n^* kann entweder durch direkte Integration, z. B. nach der Trapezregel, erfolgen oder ebenfalls durch Ausgleichsrechnung. In diesem Fall muß eine größere Rechenanlage zur Verfügung stehen, da bis etwa $n = 30$ gerechnet werden muß. Falls die Minima sehr schmal sind, kann $n = 30$ sogar noch zu klein sein, da die Werte um C_{30}^* noch in der Größenordnung von C_0^* liegen können. Für die numerischen Rechnungen dieser Arbeit stand die Zuse Z 23 des mathematischen Institutes der Universität Erlangen-Nürnberg zur Verfügung. Die Bestimmung der Koeffizienten C_n^* hätte in jedem Fall etwa 45 Stunden in Anspruch genommen, wenn sie durch Ausgleichsrechnung bestimmt worden wären. Deshalb wurden die Koeffizienten C_0^*, C_1^*, C_2^*, C_5^*, C_6^* durch direkte Integration nach der Trapezregel erhalten. Es liegt aber auch ein ausgetestetes Algol-Programm für die Ausgleichsrechnung vor. Nach Gl. (10) erhält man die benötigten Funktionen

C_n. Da die Normierungsbedingung $L_1 + L_2 = 1$ für das sphärische Modell erfüllt sein muß, wird die Lichtkurve für $\psi = 90°$ auf 1 normiert. Als normierter Näherungswert für die Tiefe des Hauptminimums wird ein rektifizierter Wert genommen. Die Maximalhelligkeit (ohne Bedeckung) ist für $\psi = 0$ gegeben durch

$$A_H = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \tag{41}$$

Es ist also

$$\overline{\lambda}_H = \lambda_H / A_H \tag{42}$$

Der Querstrich werde im Folgenden wieder weggelassen, die Tiefe des Minimums also als normiert angenommen. Es sei darauf hingewiesen, daß bei Vorliegen von Reflexionseffekt die Normierung nicht die beste mögliche ist. Im allgemeinen ist der mittlere Beobachtungsfehler von λ_H aber mindestens von der gleichen Größenordnung. In einer höheren Näherung wird von Gl. (42) ohnehin kein Gebrauch mehr gemacht, da der Effekt der Verformung und der Reflexion durch $\Delta\alpha$ berücksichtigt wird. Bei erster Betrachtung kann der Eindruck entstehen, daß die Bestimmung der C_n nach Gl. (10) und die Normierung nach Gl. (42) mit der üblichen Rektifikation identisch sind. Das ist aber nicht der Fall, denn durch Gl. (10) wird ein additiver Anteil völlig exakt abgetrennt, ohne daß irgendwelche Voraussetzungen über die Natur dieses Anteils gemacht werden müssen. Durch Gl. (42) wird nur eine Ausgangsnäherung gewonnen, so daß auch hier die Einschränkungen des rektifizierbaren Modells nicht auftreten.

Die eigentliche Berechnung der Elemente geht von den vier Größen C_0, C_1/C_0, C_2/C_0 und $1 - \lambda_H$ aus. Aus diesen Werten ist r_a, r_b, i und L_b zu bestimmen. Statt r_b kann $k = r_b/r_a$ benutzt werden, statt L_b auch L_H, da bei Occultation $L_b = L_H$ ist und bei Transit $1 - L_b = L_H$. Zunächst wird angenommen, daß die gegebenen Werte zu einem sphärischen Modell gehören. Aus den Näherungswerten r_a, r_b, i und L_H werden die Korrekturen D, K, $\delta\alpha$ und $\Delta\alpha$ bestimmt, wobei x_a, x_b aus C_5 und C_6 berechnet oder den Spektren entsprechend angenommen werden. Sind die Korrekturen bekannt, dann können die ursprünglichen Werte C_n und $1 - \lambda_H$ für die Einflüsse der Verformung und des Reflexionseffektes korrigiert werden sowie die Randverdunkelung berücksichtigt werden. Dadurch entsprechen sie den Werten eines exakten sphärischen Modells ohne Randverdunkelung. Die verschiedenen möglichen Typen der Verfinsterung im Hauptminimum — Occultation oder Transit, partielle oder totale Bedeckung — müssen zunächst getrennt als mögliche Lösungen behandelt werden. Im Verlaufe der Rechnung ist dann die Entscheidung möglich, welcher Bedeckungstyp tatsächlich vorliegt. In jedem Fall wird aber aus dem Vorstehenden ersichtlich, daß es genügt, die Lösungsmethode für das sphärische Modell ohne Randverdunkelung zu entwickeln.

§ 2. Totale und ringförmige Bedeckungen

Im Falle einer totalen Bedeckung im Hauptminimum ist

$$1 - \lambda_H = L_b = L_H \tag{43}$$

während bei ringförmiger Bedeckung das Nebenminimum einer totalen Bedeckung entspricht. In diesem Fall ist

$$1 - \lambda_N = L_b = 1 - L_H \tag{44}$$

In der Mitte des Minimums ist bei totaler Bedeckung

$$\alpha^{oc} = 1 \text{ und } \alpha^{tr} = k^2 \tag{45}$$

Daraus folgt mit Gl. (22) und (23) für ringförmige Bedeckungen

$$L_H = L_a = 1 - (1 - \lambda_H) f \tag{46}$$

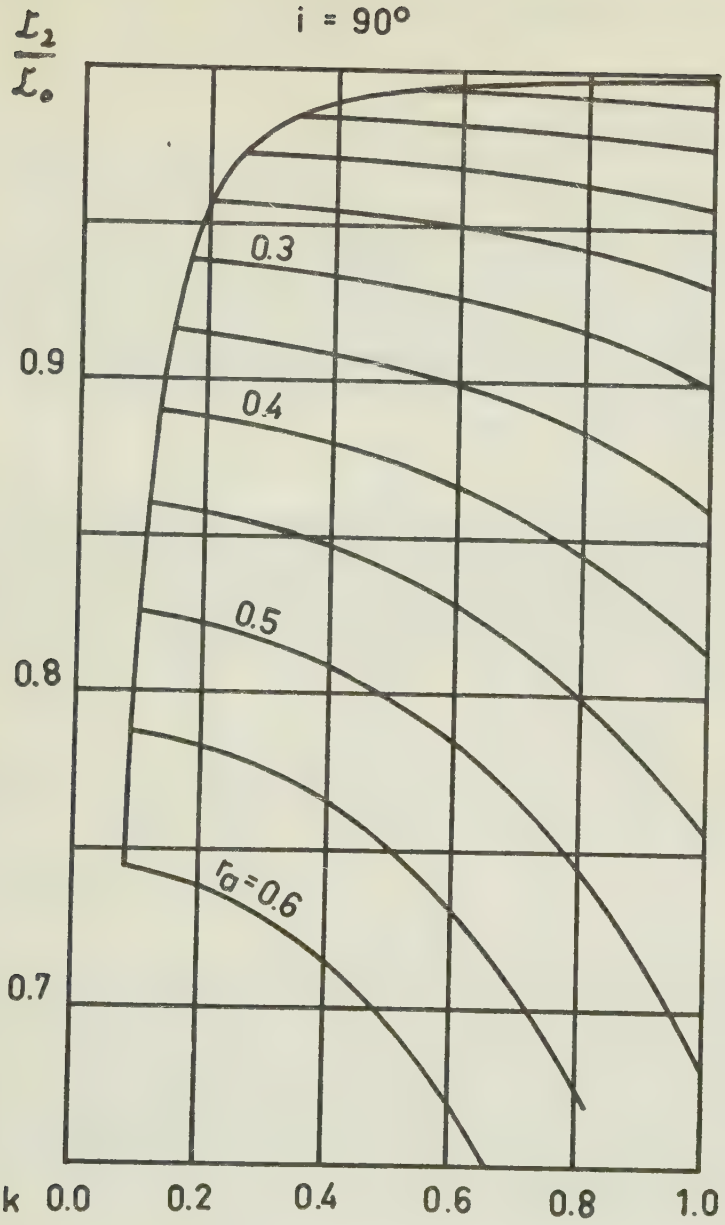


Abb. 2: $G_2 = \mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ ist als Funktion von k dargestellt. Der Parameter ist r_a. Die Kurven sind für $i = 90^\circ$ gezeichnet, am linken Rand sind sie durch $r_b = 0{,}05$ begrenzt.

f ist aus Gl. (20) und (21) bzw. (22) leicht zu berechnen. L_a und L_b sind in diesem Fall also direkt zu bestimmen. Da außerdem nach Gl. (21) und (22) ein Zusammenhang zwischen f, L_H und k^2 besteht, ist auch k bekannt. Bei totaler Bedeckung ist

$$k^2 = \frac{f\, L_H}{1 - L_H} \tag{47}$$

während bei ringförmiger Bedeckung gilt

$$k^2 = \frac{1 - L_H}{f\, L_H} \tag{48}$$

Zu berechnen bleiben noch i und r_a. Zu diesem Zweck wurden Nomogramme von G_2 für verschiedene Werte von i gezeichnet. In Abb. 2 ist das Nomogramm für $i = 90^\circ$ dargestellt. k ist die Abszisse, G_2 die Ordinate, r_a der Parameter. Da k und G_2 bekannt sind, erhält man für jeden Wert von i ein $r_a(i)$. Ein Maschinenprogramm berechnet nun jeweils $C_0(k, i, r_a(i))$ bei bekanntem L_H und k. Durch Interpolation stellt man den Wert i_0 fest, für den C_0^{beob} mit $C_0(i_0)$ übereinstimmt. Damit ist die Lösung gefunden. Möglicherweise erhält man zwei verschiedene Lösungen, für $L_H = L_a$ oder $L_H = L_b$. Die Entscheidung über den Typ wird an späterer Stelle getroffen.

§ 3. Partielle Bedeckungen

Bei partiellen Bedeckungen kann im Hauptminimum der kleinere Stern bedeckt sein (oc) oder der größere Stern (tr). In beiden Fällen bestimmt man zunächst nach Gl. (21) bzw. (22) den Wert von f. Während bei totalen und ringförmigen Bedeckungen k und L_H sofort errechnet werden können, müssen jetzt alle Parameter L_H, r_a, k und i gleichzeitig bestimmt werden. Für einen festen Wert von k ist L_H durch Gl. (21a) bzw. (22a) gegeben. In Gl. (23) eingesetzt erhält man mit $1 - \lambda_H$ den Wert α_0^H. Führt man eine neue Variable, die geometrische Tiefe der Bedeckung p_0, ein durch

$$p_0 = \frac{\cos i - r_a}{r_b} \tag{49}$$

so ist α_0^{oc} eine Funktion von p_0 und k. Ist das Hauptminimum vom Typ Transit, dann hat man zu setzen

$$\alpha_0^{oc} = \alpha_0^H / k^2 \tag{50}$$

andernfalls ist

$$\alpha_0^{oc} = \alpha_0^H \tag{51}$$

Die Umkehrfunktion $p_0(k, \alpha_0^{oc})$ ist bei W. P. ZESSEWITSCH [13] tabuliert. Es ist, wie man aus der Definition sehen kann, $1 \geqq p_0 \geqq -1$ bei partieller Bedeckung. Für ringförmige Bedeckungen und bei Totalität wird p_0 kleiner als -1. Für einen angenommenen Wert von k kann L_H, α_0^{oc} und damit p_0 bestimmt werden. Um eine Lösung erhalten zu können, wurde $G_2(i, r_a, p_0)$ für eine Reihe von festen Werten k gezeichnet. Die Abszisse ist i, die Ordinate G_2. Scharparameter sind p_0 und r_a. In Abb. 3 und 4 sind die Nomogramme für $k = 1{,}0$ und $k = 0{,}6$ dargestellt. Wie man sieht, ist der Schnittpunkt der Kurven p_0 mit der Ordinate G_2 in den meisten Fällen hinreichend gut definiert. Nur für p_0 nahe bei $+1{,}0$ wird der Schnittwinkel spitz und die Lösung damit unbestimmter. Das ist auch zu erwarten, da diesen Werten nur streifende Bedeckung entspricht.

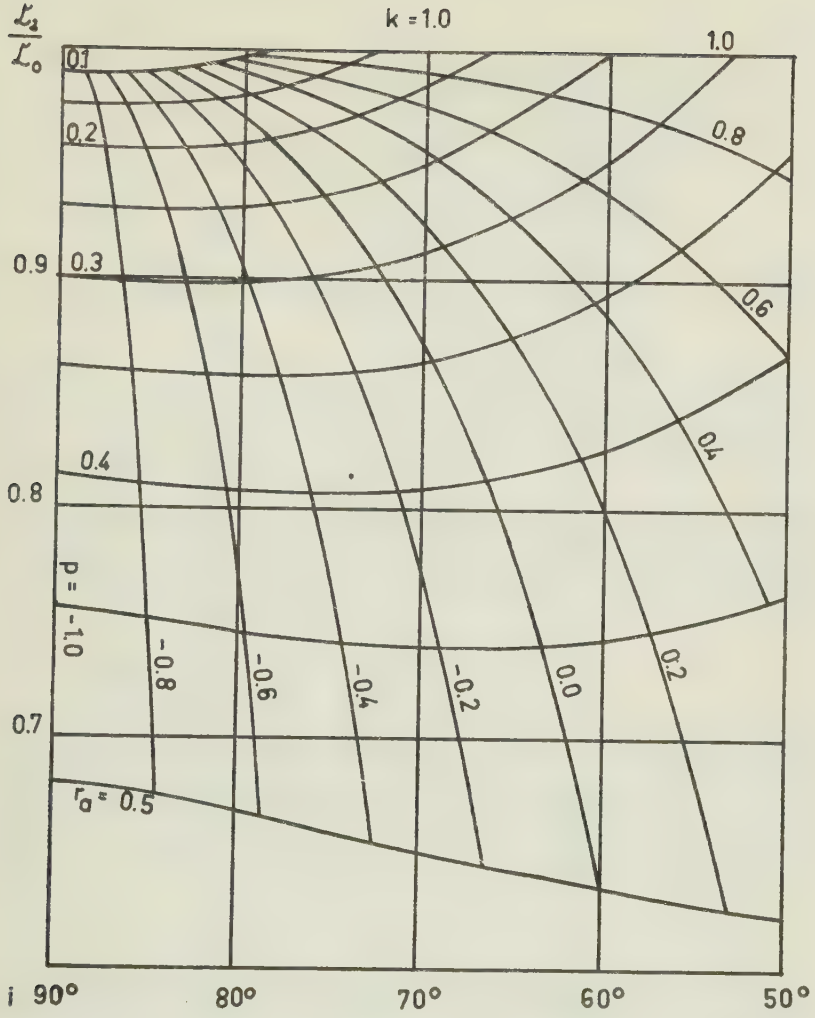


Abb. 3: $G_2 = \mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ als Funktion von i für k = 1,0. Parameter der angenähert horizontal verlaufenden Kurvenschar ist r_a, Parameter der vertikal verlaufenden Kurven ist p_0.

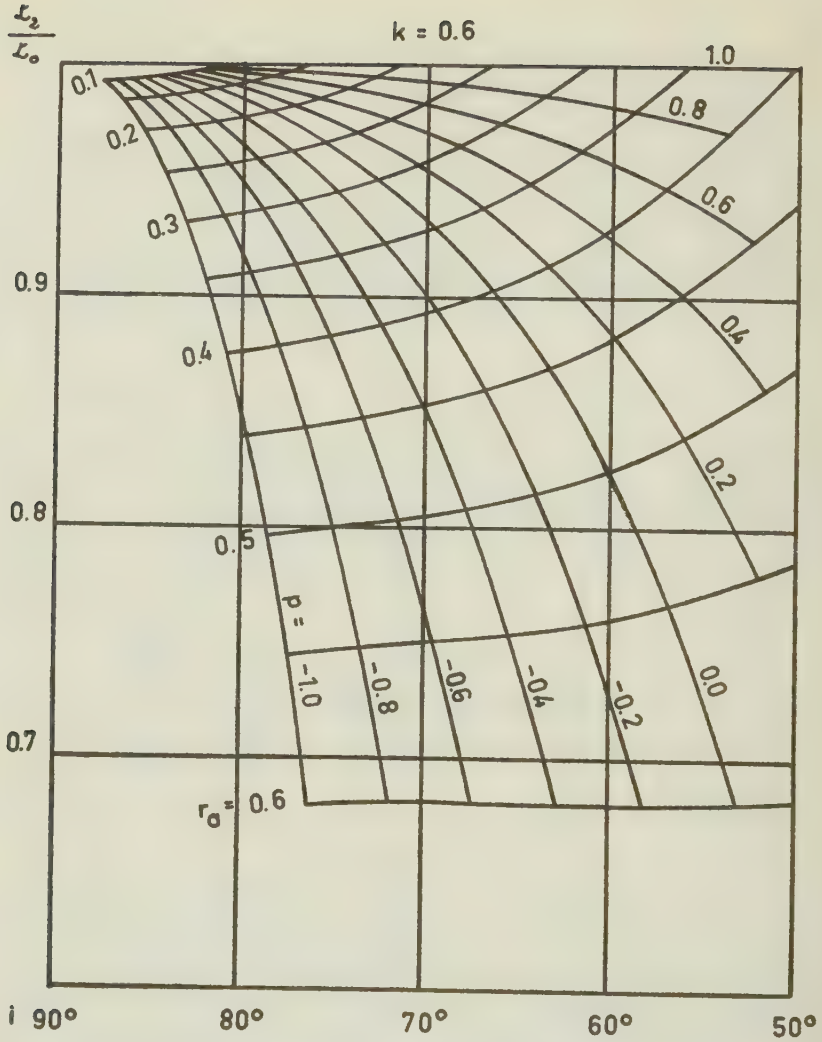


Abb. 4: $G_2 = \mathfrak{C}_2/\mathfrak{C}_0$ als Funktion von i für k = 0,6. Die Parameter sind die gleichen wie in Abb. 3.

Wird p_0 kleiner $-1{,}0$ dann ist die Bedeckung nicht mehr partiell, sondern total oder ringförmig. α_0^{oc} kann höchstens den Wert $+1{,}0$ annehmen, bei totaler Bedeckung. Dadurch folgt aus Gl. (23) eine untere Schranke für die Werte von k, bei denen noch eine partielle Bedeckung möglich ist. Es ist bei Occultation

$$k^2 = \frac{f L_H}{1 - L_H} \tag{52}$$

und

$$k^2_{min} = \frac{f(1 - \lambda_H)}{\lambda_H} \tag{52a}$$

Bei Transit ist

$$k^2 = \frac{1 - L_H}{f L_H} \tag{53}$$

und

$$k^2_{min} = \frac{f \lambda_H}{1 - \lambda_H} \tag{53a}$$

k kann also nur zwischen 1 und k_{min} liegen. Für eine Reihe von Werten k bestimmt man zunächst $L_H(k)$ und $p_0(k)$. Aus den Nomogrammen erhält man damit je einen Lösungspunkt $r_a(k)$ und $i(k)$. Damit berechnet man die $C_0(k)$. Als Lösung erhält man wiederum durch Interpolation den Wert, für den $C_0^{beob} = C_0(k_0)$ ist. Damit sind auch für partielle Bedeckungen die gesuchten Werte r_a, k, i und L_H bestimmt.

Zu berücksichtigen bleiben noch die Einflüsse der Randverdunkelung und der Verformung; außerdem ist noch zu entscheiden, ob bei mehrfachen Lösungen die Bedeckung vom Typ Occultation oder Transit und ob sie partiell oder total bzw. ringförmig ist. Diese Entscheidung wird am sichersten erst nach der Berücksichtigung von Randverdunkelung, Verformung und Reflexionseffekt getroffen.

§ 4. Die Randverdunkelung

Der Einfluß der Randverdunkelung auf die Lichtkurve eines Bedeckungsveränderlichen ist nur schwach. Daher ist es in den meisten Fällen nicht möglich, die Werte des Randverdunkelungskoeffizienten für die beiden Sterne aus der Lichtkurve zu berechnen. Nur bei sehr gut beobachteten Sternen besteht Aussicht auf Erfolg. In der vorliegenden Methode werden zur Berechnung von x_a und x_b die Koeffizienten C_5 und C_6 benutzt. Sie wurden gewählt, weil mit wachsendem n zunächst der Unterschied von $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{D}_n$ zunimmt, andererseits auch noch kein Vorzeichenwechsel und damit keine Mehrdeutigkeit auftritt. Die Koeffizienten treten explizit auf in der Gleichung

$$C_n - \overline{C}_n{}^0 - K_n = 2 L_b (\mathfrak{D}_n{}^{oc} - \mathfrak{C}_n{}^{oc}) x_b + (-1)^n 2 L_a (\mathfrak{D}_n{}^{tr} - \mathfrak{C}_n{}^{tr}) x_a \tag{54}$$

Die beiden Unbekannten x_a und x_b sind aus den Gleichungen für $n = 5{,}6$ direkt zu bestimmen. Es zeigte sich allerdings, daß diese Bestimmung nur bei sehr genauen Lichtkurven möglich ist. Im allgemeinen ist es sicherer, die Werte für x der Tabelle von S. CHANDRASEKHAR und G. MÜNCH [1] zu entnehmen, die für verschiedene Spektraltypen und Wellenlängen der Beobachtung theoretische Werte für x gerechnet haben. Die Elemente der Bedeckungsveränderlichen werden durch die Wahl der Randverdunkelungskoeffizienten wenig geändert. Es ist daher besser, einen sinnvollen Wert von x anzunehmen und damit die D_n zu berechnen. Ist die endgültige Lösung gefunden, dann kann versucht werden, x_a und x_b aus Gl. (54) zu berechnen. Gerade bei Kontaktsystemen ist K_n oft erheblich größer als D_n, so daß auch die Verformung die Berechnung von x erschwert. Bei weit getrennten Systemen ist die Berechnung der Randverdunkelungskoeffizienten erfolgversprechender.

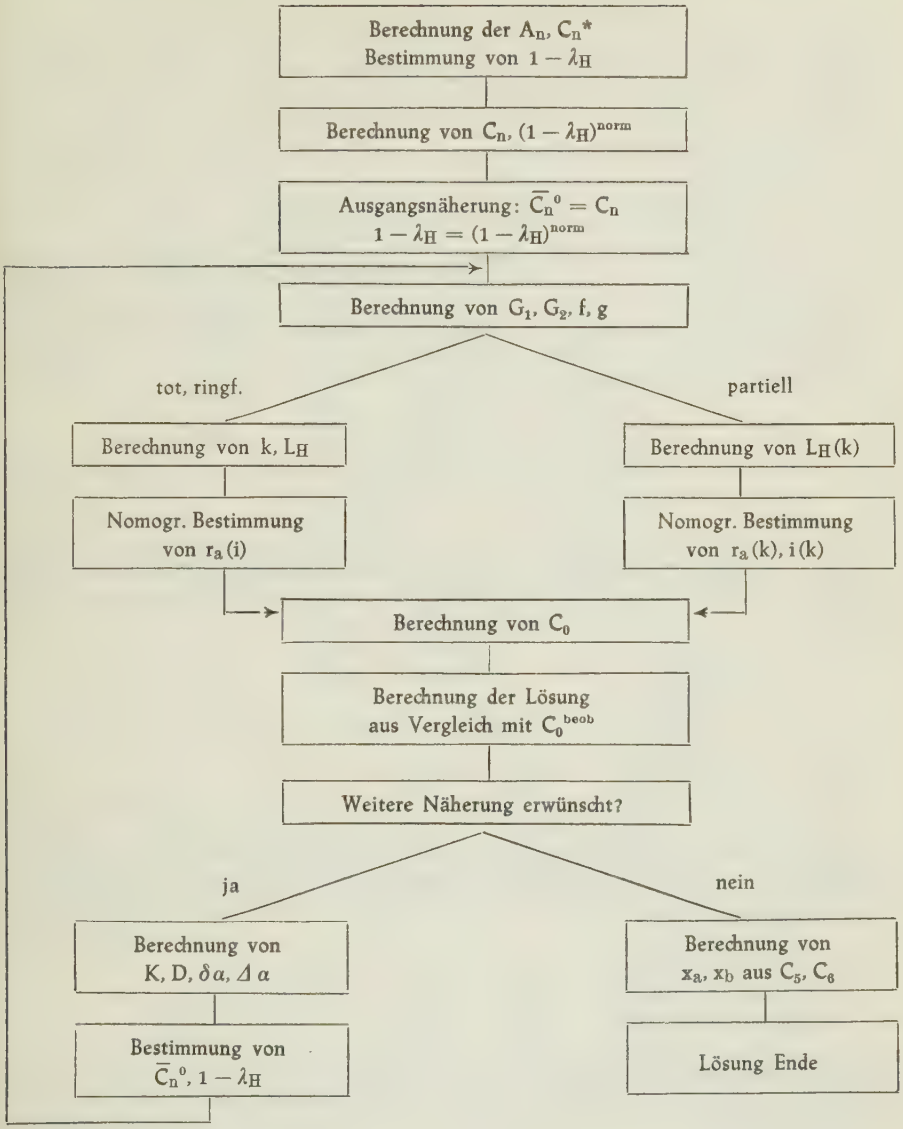
§ 5. Allgemeiner Gang der Lösung

Gegeben sind die Werte C_0, C_1, C_2, C_5, C_6 und $1 - \lambda_H$. Zunächst wird angenommen, daß die Werte C_0, C_1, C_2 den Werten C_n^0 eines sphärischen Modells ohne Randverdunkelung entsprechen. Für die Tiefe des Minimums wird der normierte Wert genommen. G_1 und G_2 werden nach Gl. (18) und (19) bestimmt. Aus Abb. 1 erhält man $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ und damit nach Gl. (20) g bzw. f. Nun werden für die vier Möglichkeiten der Bedeckung im Hauptminimum die Lösungen ermittelt. Möglicherweise ergibt sich für eine oder mehrere der Bedeckungsarten überhaupt keine Lösung, da C_0^{beob} einen Wert hat, der außerhalb des Wertebereichs der $C_0(i)$ oder $C_0(k)$ liegt. Dann ist die Entscheidung über den tatsächlichen Typ bereits getroffen. Liegen mehrere Lösungen vor, dann muß der Typ festgestellt werden. Zunächst kann man oft zwischen total/ringförmig und partiell entscheiden: Im ersten Fall kann zwar eine Lösung erhalten werden, die Werte i, k und r_a führen aber nur zu einer partiellen Bedeckung. Ist das nicht der Fall, oder muß man zwischen oc und tr entscheiden, dann berechnet man am besten die Werte C_1, C_5 und C_6. Die Werte der richtigen Lösung müssen nahe bei den beobachteten Werten liegen, die der anderen Lösungen werden meistens erheblich abweichen. Falls das Radienverhältnis nahe bei 1 liegt, kann die Unterscheidung zwischen oc und tr schwierig werden. In diesem Fall ist unter Umständen mit beiden Lösungen weiterzurechnen und die Unterscheidung in der nächsten Näherung durchzuführen.

Zunächst hat man die Näherungswerte r_a, L_H, k und i erhalten. Daraus sind die Korrekturen K, D, $\delta\alpha$ und $\Delta\alpha$ zu berechnen. Neben den bekannten Größen ist dazu besonders die Kenntnis des Massenverhältnisses notwendig. Bei Vorliegen spektroskopischer Ergebnisse ist es bekannt, andernfalls muß es abgeschätzt werden. Eine Möglichkeit hierzu bietet der Orientierungslichtwechsel, wie z. B. bei H. MAUDER [9], da aus den Koeffizienten A_n der Wert von q abgeschätzt werden kann. Auch die empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung kann benutzt werden, wobei aber gerade bei Kontaktsystemen Vorsicht geboten ist. Dagegen kann man bei diesen Systemen annehmen, daß die Sterne gerade ihre Roche-Grenze ausfüllen und von dem Radienverhältnis auf das Massenverhältnis schließen. Alle diese Bestimmungen sind aber nur ein Ersatz beim Fehlen von Radialgeschwindigkeitskurven. Sind nun die Korrektionen an den C_n und $1 - \lambda_H$ angebracht, so hat man die tatsächlichen Werte eines entsprechenden sphärischen Modells und wiederholt den Rechengang. Mit der nun gefundenen Lösung muß sich gegebenenfalls endgültig der Typ der Lösung entscheiden lassen, bei guten Lichtkurven kann auch x_a und x_b berechnet werden. Nötigenfalls kann man auch mit den verbesserten Werten eine neue Korrektur vornehmen und die Rechnung noch einmal wiederholen, in den meisten Fällen wird dies jedoch nicht nötig sein.

Die Genauigkeit der Methode ist praktisch begrenzt durch die Ablesegenauigkeit auf den Nomogrammen. An sich ist es keine Schwierigkeit, die Werte G_2 auch in Tabellenform zu bringen, um durch Interpolation eine größere Genauigkeit erreichen zu können. Auf den Nomogrammen im Format DIN A 4 können die Werte von r_a auf 0,001 und die Werte i auf $0^{\circ}1$ genau abgelesen werden. Die Unsicherheit der Beobachtungen läßt die Ausnutzung dieser Genauigkeit kaum zu, überdies kann sie durch Vergrößerung auf DIN A 2 noch erheblich gesteigert werden. Daher wurde vorläufig darauf verzichtet, umfangreiche Tabellen zu rechnen. Die jeweils benötigten Werte K, D, $\delta\alpha$, $\Delta\alpha$, $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{D}_n$ wurden für die einzelnen Fälle direkt berechnet. Die Programme dafür liegen vorläufig nur in Maschinensprache für die Z 23 vor, es ist aber geplant, auch Algol-Programme für diese Funktionen aufzustellen.

Rechenschema:



IV. Praktisches Beispiel einer Lösung: W UMa

§ 1. Die Lichtkurve von K. K. KWEE

Zur Erprobung der beschriebenen Methode wurde der Bedeckungsveränderliche W UMa ausgewählt. Dieser Stern wurde intensiv beobachtet, es ist der Prototyp der Kontaktsysteme. Außerdem liegen gute spektroskopische Messungen von O. STRUVE und G. HORAK [12] vor. Zur Berechnung der Elemente wurde die Lichtkurve von K. K. KWEE [8] benutzt; die ganze Lichtkurve wurde in einer einzigen Nacht gewonnen, die Streuung der einzelnen Meßwerte ist sehr klein, da nur im integralen Licht gemessen wurde. Dementsprechend liegen die einzelnen Beobachtungen zeitlich sehr dicht. K. K. KWEE selbst nahm bei seiner eigenen Bearbeitung der Messungen von vorneherein eine Bahnneigung von 90° an. Später zeigte sich, daß seine Rektifikationsformel ungenügend war. Eine zweite Bearbeitung der gleichen Lichtkurve durch M. KITAMURA [2] ergab eine Bahnneigung von 89°. Dagegen fand Z. KOPAL [7] durch Vergleich der Lichtkurve mit den spektroskopischen Messungen, daß i bei 78° liegen muß. Gerade der Vergleich mit den Ergebnissen von KITAMURA ist besonders interessant, da er ebenfalls eine neue Methode der Berechnung, durch unvollständige Fouriertransformation der Lichtkurven, entwickelt hat. Bei ihm muß die Lichtkurve wie bisher rektifiziert werden, außerdem werden nur jeweils die einzelnen Äste der Minima in Fourierreihen nach Sinus- und Cosinusgliedern entwickelt. Um einen möglichst guten Vergleich zuzulassen, wurde die gleiche Lichtkurve benutzt, und es wurden die von ihm bestimmten Werte für den Orientierungslichtwechsel angenommen. Der Lichtwechsel außerhalb der Bedeckungen ist nach ihm

$$\begin{aligned} l_{beob} = 1{,}67645 &- 0{,}01537 \cos\psi \;\; - 0{,}15163 \cos 2\psi \\ &- 0{,}00068 \cos 3\psi + 0{,}02470 \cos 4\psi \\ &+ 0{,}03158 \sin\psi \;\; + 0{,}00071 \sin 2\psi \\ &- 0{,}00233 \sin 3\psi + 0{,}01335 \sin 4\psi \end{aligned} \tag{55}$$

Die Assymmetrie der Lichtkurve, zu deren Erklärung noch keine befriedigende Theorie existiert, wurde wie bei KITAMURA durch Subtraktion der Sinusglieder entfernt. Statt einer Rektifikation wurde dagegen nur die Helligkeit bei $\psi = 90°$ auf 1 normiert, was der Festlegung $L_1 + L_2 = 1$ entspricht. Die benötigten Werte A_n sind dann

$$\begin{aligned} A_0/2 &= +\,0{,}90483 \\ A_1 &= -\,0{,}00830 \\ A_2 &= -\,0{,}08184 \\ A_3 &= -\,0{,}00037 \\ A_4 &= +\,0{,}01333 \end{aligned}$$

Die beobachteten Tiefen der Minima sind $(1 - \lambda_H)^{beob} = 0{,}4888$ und $(1 - \lambda_N)^{beob} = 0{,}4513$.

Als Näherungswert für das Hauptminimum wurde der rektifizierte Wert von KITAMURA genommen: $1 - \lambda_H = 0{,}3812$. Aus der Integration über die Gesamtlichtkurve erhält man

$$\begin{aligned} C_0^*/2 &= +\,0{,}82227 \\ C_1^* &= -\,0{,}01758 \\ C_2^* &= -\,0{,}21646 \\ C_5^* &= -\,0{,}00152 \\ C_6^* &= -\,0{,}02144 \end{aligned}$$

Nach Gl. (10) erhält man daraus die benötigten Koeffizienten C_n:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0{,}16512 \\ C_1 &= 0{,}00928 \\ C_2 &= 0{,}13462 \\ C_5 &= 0{,}00152 \\ C_6 &= 0{,}02144 \end{aligned}$$

Schließlich ist noch

$G_1 = 0{,}05620$
$G_2 = 0{,}81529$

Die zur Lösung notwendigen Werte sind damit vollständig.

§ 2. Die Bestimmung der Elemente

Zunächst wird $C_n = \overline{C}_n{}^0$ angenommen und für die Tiefe des Hauptminimums der rektifizierte Wert benutzt. Aus Abb. 1 entnimmt man für $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_0$ den Wert 0,952. Damit erhält man

$g = 0{,}05903$ und $f = 0{,}8885$

Bei totaler Bedeckung ist

$L_H = 0{,}3812 \qquad k = 0{,}7398$

Für verschiedene Werte von i ergibt sich dann

i	r_a	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0{}^0$
90°	0,446	0,276	0,6242
85°	0,447	0,271	0,6129
80°	0,448	0,245	0,5541
75°	0,449	0,209	0,4727
70°	0,450	0,168	0,3800

Bei ringförmiger Bedeckung ist

$L_H = 0{,}6613 \qquad k = 0{,}7592$

i	r_a	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0{}^0$
90°	0,442	0,273	0,6174
85°	0,443	0,267	0,6039
80°	0,444	0,241	0,5451
75°	0,445	0,204	0,4614
70°	0,446	0,165	0,3732

Für partielle Bedeckung und Occultation ist $k_{min} = 0{,}74$ und

k	L_H	$\alpha_0{}^{oc}$	p_0	r_a	i	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0{}^0$
1,0	0,5295	0,7199	— 0,5563	0,392	79°8	0,186	0,5843
0,9	0,4769	0,7993	— 0,6834	0,412	80°8	0,212	0,5998
0,8	0,4187	0,9104	— 0,8591	0,434	82°1	0,243	0,6036

Für $k = k_{min}$ müssen die Werte mit den entsprechenden Werten für totale Bedeckung übereinstimmen. Bei Transit sind die Werte für $k = 1{,}0$ mit denen für oc identisch. Es ist $k_{min} = 0{,}76$ und

k	L_H	$\alpha_0{}^{oc}$	p_0	r_a	i	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0{}^0$
0,9	0,5815	0,8093	— 0,6993	0,412	81°2	0,214	0,5980
0,8	0,6322	0,9343	— 0,8968	0,434	82°9	0,248	0,6298

Der Grenzwert der Bahnneigung für totale oder ringförmige Bedeckung im Hauptminimum liegt für die abgeleiteten Werte bei 83°3 bzw. bei 83°9. Für kleinere Bahnneigungen ist nur partielle Bedeckung möglich. Der beobachtete Wert von $\pi\overline{C}_0{}^0$ ist 0,5187. Wie man sieht, führt die Lösung hier auf i etwa 78° und $r_a = 0{,}448$ bei oc, $r_a = 0{,}444$ bei tr. Für partielle Bedeckungen ergibt sich überhaupt keine Lösung, $\pi\overline{C}_0{}^0$ wird allerdings wieder kleiner, wenn man sich dem Wert k_{min} nähert, entsprechend den Werten für Totalität. Die Bahnneigung würde

dann etwa bei 83° liegen. Da die Lösung bei totaler und ringförmiger Bedeckung auf Bahnneigungen führt, bei denen nur partielle Bedeckung möglich ist, wurden zur Berechnung der Korrekturen die Werte $i = 83°$, $r_a = 0{,}448$ und $k = k_{min}$ benutzt sowie $L_H = 0{,}3812$ für oc, $L_H = 0{,}6613$ für tr. Der Unterschied in r_a und k_{min} ist so klein, daß bei den von L_H unabhängigen Korrekturwerten eine getrennte Berechnung nicht notwendig war. Sie wurde zur Probe durchgeführt, die Abweichungen betrugen weniger als 3 % im Maximum.

Die korrigierte Tiefe des Hauptminimums wird 0,3880; die zunächst benutzte Näherung war also gut. Bei dem neuen Wert wurde die Randverdunkelung nicht berücksichtigt. Ein Wert für x kann in dieser Näherung noch nicht berechnet werden, daher wird $u_a = u_b = 0{,}8$ angenommen und damit $x_a = x_b = 0{,}73$. Das Minimum für das entsprechende sphärische Modell wird flacher, es wird $1 - \lambda_H = 0{,}3786$. Die Korrekturen für die C_n wurden auf der Z 23 gerechnet. Es ist

$$\overline{C}_0^{\,0} = C_0 + 0{,}01482$$
$$\overline{C}_1^{\,0} = C_1 + 0{,}01074$$
$$\overline{C}_2^{\,0} = C_2 + 0{,}01011$$

bei Occultation. Bei Transit sind die entsprechenden Korrekturwerte 0,01011; 0,00278 und 0,00904.

Für Occultation ist zunächst

$$\pi\overline{C}_0^{\,0} = 0{,}5653;\ G_1 = 0{,}1113;\ G_2 = 0{,}8103$$
$$g = 0{,}1171;\ f = 0{,}7903$$

Damit wird bei Totalität

$$L_H = 0{,}3786 \qquad k = 0{,}6939$$

i	r_a	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0^{\,0}$
90°	0,458	0,288	0,6133
80°	0,463	0,263	0,5600
70°	0,469	0,185	0,3939

Die Grenze der Bahnneigung liegt bei 82°, es wird also gerade keine Bedeckung mehr möglich sein. Bei partieller Bedeckung ist

k	L_H	α_0^{oc}	p_0	r_a	i	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0^{\,0}$
1,0	0,5586	0,6778	— 0,4882	0,396	78°3	0,180	0,5655
0,9	0,5061	0,7481	— 0,5674	0,422	78°3	0,202	0,5750
0,8	0,4474	0,8462	— 0,6960	0,438	78°8	0,228	0,5737
0,75	0,4158	0,9047	— 0,7834	0,450	79°3	0,242	0,5659
0,7	0,3827	0,9893	— 0,9530	0,459	81°1	0,262	0,5639

Für Transit ergibt sich demgegenüber bei $x_a = 0{,}73$

$$1 - \lambda_H = 0{,}3370;\ \pi\overline{C}_0^{\,0} = 0{,}5392;\ G_1 = 0{,}0703;\ G_2 = 0{,}8370$$
$$g = 0{,}0734;\ f = 0{,}8632$$

Bei ringförmiger Bedeckung ist

$$L_H = 0{,}7091;\ k = 0{,}6894$$

i	r_a	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0^{\,0}$
90°	0,427	0,287	0,5661
80°	0,435	0,239	0,4715
70°	0,444	0,162	0,3196

Eine Lösung für $i = 85^\circ$ etwa wäre möglich. In diesem Falle müßte aber $C_1 = 0{,}0441$ sein, während tatsächlich $C_1 = 0{,}0121$. Die Lösung ist also nicht brauchbar. Bei partieller Bedeckung ist

k	L_H	$\alpha_0{}^{oe}$	p_0	r_a	i	$\mathfrak{C}_0$	$\pi\overline{C}_0{}^0$
1,0	0,5367	0,6279	— 0,4067	0,373	$77^\circ3$	0,159	0,4995
0,9	0,5885	0,7070	— 0,5053	0,391	$77^\circ8$	0,176	0,4901
0,8	0,6441	0,8175	— 0,6499	0,410	$78^\circ7$	0,205	0,4948
0,7	0,7028	0,9786	— 0,9237	0,433	$81^\circ3$	0,243	0,4898

Für Transit existiert also keine Lösung.

Die einzige übrigbleibende Lösung ist vom Typ Occultation, partielle Bedeckung. Es sieht so aus, als ob auch für k gegen 1,0 eine Lösung existieren könnte, aber auch hier würde C_1 zu groß, so daß sie ausscheidet. Die Elemente der Lösung sind:

$k = 0{,}74$
$r_a = 0{,}452$
$L_H = 0{,}408$
$i = 79^\circ5$

Es soll noch versucht werden, die Randverdunkelungskoeffizienten zu berechnen. Die beiden Gleichungen für $n = 5, 6$ sind

$$0{,}00039\, x_a + 0{,}00352\, x_b = 0{,}00135$$
$$0{,}00371\, x_b - 0{,}00073\, x_a = 0{,}00310$$

Die erste Gleichung ist vermutlich unsicherer als die zweite, da in ihr alle Korrekturen als Differenzen eingehen, der relative Fehler dadurch größer wird. Eine direkte Auflösung des Gleichungssystems führt zu sinnlosen Werten; setzt man $x_a = x_b$, so erhält man aus der ersten Gleichung $x = 0{,}35$ und aus der zweiten Gleichung $x = 1{,}04$. Für $x_a = 0$ ist $x_b = 0{,}34$ und $0{,}84$; für den anderen Extremwert $x_a = 1$ wird $x_b = 0{,}27$ und $1{,}03$. Ein sicherer Wert ist nicht zu bestimmen, der angenommene Wert $x = 0{,}73$ ist der Mittelwert für $x_a = x_b$.

Herrn Prof. Dr. P. Wellmann möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und stetes förderndes Interesse herzlich danken. Herrn Direktor Dr. W. Strohmeier danke ich für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Institut durchführen zu können, Herrn Prof. Dr. W. Specht danke ich für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit an der Z 23.

Literaturverzeichnis:

[1] CHANDRASEKHAR, S., und G. MÜNCH, Harv. Obs. Circ. **453**, 1949.
[2] KITAMURA, M., Determination of the Elements of Eclipsing Binary Stars, 1964.
[3] KOPAL, Z., Harvard Monograph **6**, 1946.
[4] KOPAL, Z., Harvard Monograph **8**, 1950.
[5] KOPAL, Z., Close Binary Systems, London 1959.
[6] KOPAL, Z., Contr. Univ. Manchester, Ser. 3, **83**, 1960.
[7] KOPAL, Z., und M. B. SHAPLEY, Jodrell Banks Annals **1**, 141, 1956.
[8] KWEE, K. K., BAN **12**, 330, 1956.
[9] MAUDER, H., Zs, Aph. **60**, 222, 1964.
[10] RUSSELL, H. N., und H. SHAPLEY, ApJ. **36**, 385, 1912.
[11] RUSSELL, H. N., und J. E. MERRILL, Princeton Contr. **26**, 1952.
[12] STRUVE, O., und G. HORAK, ApJ. **112**, 178, 1950.
[13] ZESSEWITSCH, W. P., Bull. Astr. Inst. UdSSR, Nr. 50.

LEBENSLAUF

Am 4. Mai 1937 wurde ich, Horst Joseph Joachim M a u d e r, als viertes Kind der Eheleute Albert Mauder, Kaufmann, und seiner Ehefrau Ilse, geb. Nestler, in Nürnberg geboren. Vom Herbst 1943 bis zum Herbst 1945 besuchte ich die Volksschule in Betzenstein/Ofr., vom Herbst 1945 bis zum Herbst 1947 die Uhland-Schule in Nürnberg. Vom Herbst 1947 ab besuchte ich das Melanchthon-Gymnasium in Nürnberg, das ich im Juli 1956 nach bestandener Reifeprüfung verließ. Vom WS 1956/57 an studierte ich an der Universität Erlangen Mathematik und Physik, im November 1958 bestand ich dort die Diplom-Vorprüfung für Physiker. Anschließend setzte ich mein Studium in Erlangen fort, unterbrochen im SS 1959 durch ein Studium an der Universität München. Im Juli 1961 bestand ich an der Universität Erlangen die Diplom-Hauptprüfung für Physiker mit einer astronomischen Arbeit, die ich an der Remeis-Sternwarte Bamberg angefertigt hatte. Vom April 1961 bis August 1961 verwaltete ich an der Sternwarte Bamberg eine wissenschaftliche Angestelltenstelle, vom September 1961 ab wurde ich wissenschaftlicher Angestellter an der Sternwarte. Im SS 1962 wurde ich zum weiteren Astronomiestudium an die Universität München beurlaubt, von wo ich am 1. August 1962 nach Bamberg zurückkehrte. Am 5. April 1963 heiratete ich Elke Reinhild Kabermann, geboren in Nordhausen/Harz. Im Oktober 1964 wurde ich Verwalter der neugeschaffenen wissenschaftlichen Assistentenstelle an der Remeis-Sternwarte Bamberg, welche Stelle ich zur Zeit noch innehabe. Am 7. März 1965 wurde mir mein erster Sohn, Christoph Friedrich Reinhard Mauder, geboren.